数理解析研究所講究録
277巻 1976年 35-39

既約表現の次数がすべてπ-数であるπ-可解群について

阪大 理　八尾 隆

有限群Gに対して，$\mathrm{Irr}(G)$でGの複素既約表現の指標の集合を表すことにする。NをGの正規部分群とすれば，任意の$\chi \in \mathrm{Irr}(G)$に対して，θを$\chi|_N$の一つの既約成分とすれば，$\chi(1)/\theta(1)$は$|G:N|$の約数となることが知られている。N. Ito の定理と合せて，次のことが又知られている。『abelian subgroup AがGで subnormal の時，即ちAがGと normal series で結ばれる時，任意の$\chi \in \mathrm{Irr}(G)$に対して$\chi(1)$は$|G:A|$を割りきる』

そこで，逆にGの character degrees $\{\chi(1) \mid \chi \in \mathrm{Irr}(G)\}$に関する情報が与えられた時，$G$はどの程度の"大きな" normal (or subnormal) abelian subgroup を持つだろうか？という問題が考えられる。今回得た結果は，この方向の I. M. Isaacs − D. S. Passman（以下 I−P と略す）による結果の拡張である。

まずπを素数からなるある集合とし，次の条件を考える。

<u>定義</u> 群Gが c.d.π (character degrees π) を満たすとは, 任意の $\chi\in \mathrm{Irr}(G)$ の次数 $\chi(1)$ が π-数 (即ち, $\chi(1)$ の素因数がすべてπの元) であることをいう.

例えば, Gが normal abelian Hall π'-subgroup を持つなら, Ito の定理により, Gは c.d.π を満たす。これについては次の場合に逆も成立することが得られた。

<u>定理 1</u> Gをπ-separable group とする。この時Gが c.d.πを満たすための必要十分条件は, Gが normal abelian Hall π'-subgroup を持つことである。

証明は, P. X. Gallagher の一定理と Schur-Zassenhaus の定理を結びつけることによって示される。π-solvable π-group は solvable だから, これより直ちに次を得る。

<u>系 2</u> c.d.π を満たすπ-solvable group は solvable.

一般に c.d.πを満たす群は次の時 solvable となる。これは W. Burnside の p^aq^b-定理のほんの少しの拡張となっている。

<u>定理3.</u> G は c.d.π を満たす群とする。もし $|\pi| \leqq 2$ ならば，G は solvable。ただし $|\pi|$ は π に含まれる元の個数を表すものとする。

G が単純群の時，Burnside の lemma によれば，$\chi \in Irr(G)$ の次数が $|G : C_G(x)|$ と互いに素となる $x \in G$ に対しては $\chi(x) = 0$ となるから直交関係を用いて上定理が示される。

さて，I-P は c.d.$\{p\}$ を満たす群を扱ったが，かような群は必然的に solvable となることに注目し，上記結果（2～3）を用いて以下のように彼等の結果の拡張を得ることができる。

自然数 n の素因数の個数（重複度を数える）t を n の total exponent と呼び，$t = e(n)$ で表すことにする。

<u>定義</u> 群 G が r.x.e（representation exponent e）を満たすとは，任意の $\chi \in Irr(G)$ に対して，$\chi(1)$ の total exponent $e(\chi(1))$ が e 以下であること。

r.x.0 を満たす群は linear character しか持たない群即ち abel 群である。又 r.x.1 を満たす群は solvable となることが，I-P によって調べられている。しかし $e \geqq 2$ の時もはや nonsolvable な r.x.e を満す群がある。なおこの定

義は，c.d.$\{p\}$ を満たす群に対しては I−P のそれに一致する。

<u>主定理I</u>　群 G は c.d.π かつ r.x.e を満たすとする。さらに $|\pi| \geqq 3$ ならば，G は π-solvable であるとする。この時 G は normal series

$$G = A_e \triangleright B_{e-1} \triangleright A_{e-1} \triangleright \cdots \triangleright B_0 \triangleright A_0$$

を持ち，かつ各 i $(=1,2,\cdots,e)$ に対して素数 $p_i \in \pi$ が存在して次の条件(1)〜(4)を満たす。

(1)　A_i は r.x.i かつ c.d.π を満たす。

(2)　A_i/B_{i-1} は cyclic π_i-group，ただし $\pi_i = \pi - \{p_i\}$.

(3)　B_{i-1}/A_{i-1} は elementary abelian p_i-group.

(4)　$|A_i : A_{i-1}|$ は π−数で，$e(|A_i : A_{i-1}|) \leqq 2i+1$。

特に G は，$|G : A_0|$ が π−数で，$e(|G : A_0|) \leqq e(e+2)$ を満たす subnormal abelian subgroup A_0 を持つ。

この定理で $\pi = \{p\}$ とすると，$p_1 = p_2 = \cdots = p_e = p$，従って $A_i = B_{i-1}$ となり，I−P の結果が得られる。又，G が上定理の仮定を満たすとし，P を G の p-Sylow 群とすると，$p \notin \pi$ ならば，P は abel 群，$p \in \pi$ であっても P の交換子群列の長さは $e+1$ でおさえられることが直ちにわかる。

ところで定理I の G は，“より大きな” subnormal abelian subgroup を持つかも知れない。次にこの問題を考える。

まず次のような関数を考える。関数 f_s (resp. f_n) は次の条件を満たすもので，しかもその条件を満たすもののうち最小の値をとるものとする。条件：G を r.x.e を満たす任意の solvable (resp. nilpotent) group とする時，subnormal abelian subgroup A が存在し，$e(|G:A|) \leqq f_s(e)$ (resp. $f_n(e)$) を満たす。

定理Ⅰから，f_s が（従って f_n も）存在し，かつ $f_n(e) \leqq f_s(e) \leqq e(e+2)$ となることがわかる。

主定理Ⅱ　上記関数 f_s 及び f_n は存在し，次式を満たす。

(1)　$f_n(0)=0$，$f_n(1)=2$，及び　$e \geqq 2$ の時

$2e \leqq f_n(e) \leqq 4e-[\log_2 8e]$，ただし $[x]$ は x 以下の最大の整数を表すものとする，

(2)　$f_n(e) \leqq f_s(e) \geqq \frac{1}{2}e(e+3)$，

これより特に次を得る。

$f_n(0)=f_s(0)=0$，$f_n(1)=f_s(1)=2$，$f_n(2)=4$，$f_s(2)=4$ or 5．

なおこの定理に関連して，I–P による c.d.{p} を満たす群のときと同様に，$f_n(e)$ は"本質的"に e の一次関数となることが示されるが，$f_s(e)$ の方が"二次"から"一次"へ改善できるかどうか今後調べたい課題でもある。